Universidad Simón Bolívar
Departamento de Electrónica y Circuitos
Robótica EC3514
Profesor: Gerardo Fernández L

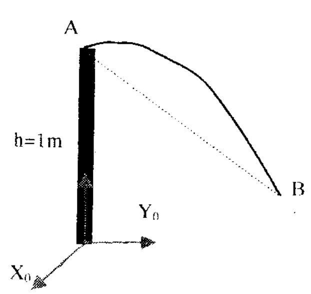
Nombre:
Carnet:

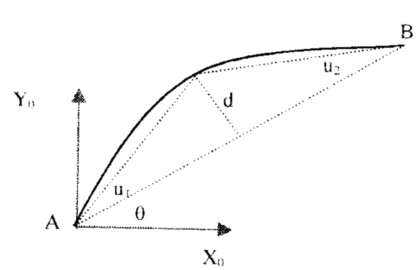
25

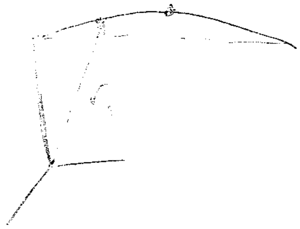
2^{do} PARCIAL (30%)

1. Considere el ***manipulador flexible*** de un solo link, mostrado en la figura; el manipulador sólo se mueve en un plano paralelo a x_0-y_0. La variable de articulación (q_1) esta conformada por la suma del ángulo de una línea imaginaria entre el eje del motor (A) y el extremo del link (B); este ángulo es conocido como θ; y el ángulo formado por la línea imaginaria y el eje (el eje es tangente al link en A); este ángulo de deformación, u_1, lo causa la flexibilidad de la barra. También se forma un ángulo u_2, en el extremo del link flexible. Consideraremos, por facilidad que $u_1=u_2$. La deformación máxima del link, d, se considera que ocurre a la mitad del link y para facilitar el modelo considere que la deformación del link ocurre como si fueran dos trozos rectos, unidos mediante un actuador que es un resorte de torsión, de forma que al torque en la unión de las dos barras se opone un torque de torsión que viene dado por $K\hat{q}_1$.
Se sabe que el link, además de tener energía cinética y potencial por efecto de la gravedad, también tiene energía potencial elástica, por efecto de la flexibilidad. Esta energía viene dada por $\frac{1}{2}Kq_1^2$. El valor de K en esta barra es de 0.1 Nm. La barra mide 1 m y pesa 2 Kg.
   a. Determine la ecuación dinámica del manipulador flexible. (Sugerencia: considere la aproximación de los dos trozos rectos y del resorte torsional). 9 ptos. 4
   b. Calcule el valor de la deformación, d, en función de las variables θ, u_1 y u_2. 5 ptos.
   c. Si se desea que d no supere los 0.01 mts, cuál es el valor máximo de u_1 y u_2. ~~5~~ptos. 7
   d. Suponga que Usted desea que el link recorra $\pi/4$ en 1 segundo, con una trayectoria de tiempo mínimo. Mediante cámaras mide la posición del extremo y registra que la deformación, d, alcanza el valor máximo de 0.01 mts. Determine el par máximo aplicado en el eje del manipulador durante esa trayectoria; desprecie la dinámica en la "segunda barra". 4 ~~5~~ptos.
   e. Si el motor empleado para mover el link tiene una constante de motor de 1 mNm/Amp determine el voltaje que aplicaría al motor para entregar el par solicitado en ese instante. Si el motor soporta un voltaje máximo de 12 Voltios, ¿necesita una caja reductora para entregar el par solicitado?, ¿de cuánto sería la caja?. La resistencia de armadura del motor es de 1 Ω. ~~3 ptos~~. ~~4~~ptos. 3
   f. Si el control del link se quiere efectuar mediante par calculado, escriba la ley de control del link. 3 ptos.

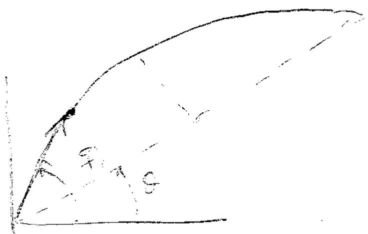
1







$$\vec{r}_1 = h\,\hat{k}_0 + \frac{L}{4}\,\hat{i}_1$$



$$\hat{i}_1 = c_1\,\hat{i}_0 + s_1\,\hat{j}_0$$

$$\vec{r}_1 = \frac{L}{4}c_1\,\hat{i}_0 + \frac{L}{4}s_1\,\hat{j}_0 + h\,\hat{k}_0$$

$$\vec{\omega}_1 = \dot{q}_1\,\hat{k}_0 \Rightarrow \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \frac{L}{4}\dot{q}_1 c_1\,\hat{j}_0 - \frac{L}{4}\dot{q}_1 s_1\,\hat{i}_0$$

$$|\vec{V}_1|^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \dot{q}_1^2$$

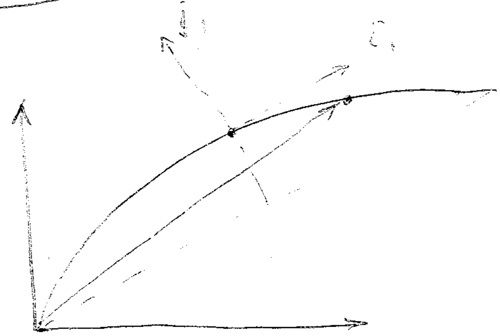
$$\boxed{K_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{2}\frac{L^2}{16}\dot{q}_1^2} + \frac{1}{2}\cancel{I}\,\dot{q}^2$$

$$I = \frac{1}{16}\ldots$$

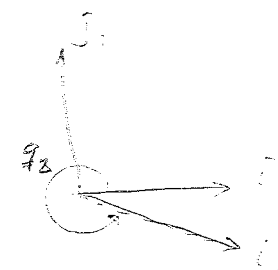
$$\frac{1}{2}\omega^T I \omega$$

$$\boxed{U_1 = \frac{m_1}{2}g\,h + \frac{1}{2}k_1 q_1^2}$$

"Cuerpo 2":



$$\hat{k}_0 = \hat{k}_1$$



$$\vec{r}_2 = h\,\hat{k}_0 + \frac{L}{2}\,\hat{i}_1 + \frac{L}{4}\,\hat{i}_2$$

$$\hat{i}_2 = \cos(2\pi - q_2)\,\vec{i}_1 - \operatorname{sen}(2\pi - q_2)\,\vec{j}_1 = \cos q_2\,\hat{i}_1 + \operatorname{sen} q_2\,\hat{j}_1$$

$$\vec{r}_2 = h\,\vec{k}_1 + \frac{L}{2}\,\hat{i}_1 + \frac{L}{4}\cos q_2\,\hat{i}_1 + \frac{L}{4}\operatorname{sen} q_2\,\hat{j}_1$$

$$\omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\,\hat{k}_1 \qquad \hat{\omega}_2 \times \hat{r}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4}c_2\right]\hat{j}_1 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\frac{L}{4}s_2\,\hat{i}_1$$

$$|\vec{v}_2|^2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2\left[\left[\frac{L}{2} + \frac{L}{4}c_2\right]^2 + \left(\frac{L}{4}s_2\right)^2\right] =$$

$$= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2\,L^2\,c_2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2 c_2^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2 s_2^2\right]$$

$$|v_2|^2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \left[\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right] =$$

$$= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \left[\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right]$$

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \left(\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right)}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{m}{2} g h + \frac{1}{2} K q_2^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{mL^2}{64} \dot{q}_1^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{m}{2} g h - \frac{1}{2} k (q_1^2 + q_2^2)}$$

<u>Ecua. 1</u> (q_1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{mL^2}{32} \dot{q}_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{mL^2}{32} \ddot{q}_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - \frac{m}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2 \frac{L^2}{4} s_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} k \, 2 q_1 = -k q_1$$

$$\left(\frac{mL^2}{32} + \frac{5mL^2}{32} + \frac{mL^2}{8} c_2 \right) \ddot{q}_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{5L^2}{16} + \frac{L^2}{4} c_2 \right) \ddot{q}_2 - \frac{m}{8} L^2 s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$- \frac{m}{8} L^2 s_2 \dot{q}_2^2 + K q_1 = \tau_1$$

$$\boxed{\frac{5mL^2}{8}\ddot{q}_1 + \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)\ddot{q}_2 - \frac{m}{8}L^2 s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{m}{8}L^2 s_2\dot{q}_2^2 + Kq = \tau}$$

[illegible] 2 (q_2)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)(\dot{q}_1+\dot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) - \frac{m}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\frac{L^2}{4}s_2\dot{q}_2$$

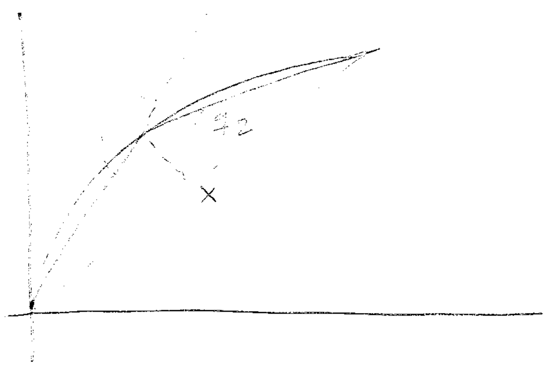
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)\ddot{q}_1 + \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)\ddot{q}_2 - \frac{mL^2}{8}s_2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$- \frac{mL^2}{8}s_2(\dot{q}_2)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -\frac{m}{4}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\frac{L^2}{4}s_2 - Kq_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)\ddot{q}_1 + \frac{m}{2}\left(\frac{5L^2}{16}+\frac{L^2}{4}c_2\right)\ddot{q}_2 - \frac{mL^2}{8}s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{mL^2}{8}s_2(\dot{q}_2)^2 \\ &+ \frac{m}{16}L^2 s_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + Kq_2 = \tau_1 - K\dot{q}_1\end{aligned}}$$

(b)



$d^2 + x^2 = \frac{L^2}{4}$ $\qquad \boxed{\alpha = q_2 - \pi}$

$\cos\alpha = c_2 c_\pi + s_2 s_\pi = -\cos q_2$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\cos\alpha = (2x)^2$$

$$2\frac{L^2}{4}\left(1 - \cos\alpha\right) = 4x^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{L^2}{8}\left(1 + \cos q_2\right)}$$

$$\boxed{d^2 = \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8}\left(1 + \cos q_2\right)}$$

$q_2 = \alpha + \pi$

$\alpha + u_1 + u_2 = \pi$

$q_2 = \cancel{\pi} - (u_1 + u_2) + \pi$

$\boxed{q_2 = 2\pi - (u_1 + u_2)}$

(c) $u_1 = u_2$ $\qquad \alpha + u_1 + u_2 = \pi$

Si $d = 0.01$ m

$$(0.01)^2 = 0.25 - \frac{1}{8}\left(1 + \cos q_2\right) \Rightarrow \boxed{\cos q_2 = 0.9992}$$

$\Rightarrow \boxed{q_2 \simeq 2,3°}$ $\qquad \alpha = 357.7 - 180°$

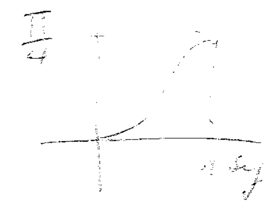
$q_2 \simeq 357.7$ $\qquad \boxed{\alpha \simeq +177,7°}$

$$2u = 180° - 177,7°$$

$$\boxed{u = 1,146°}$$

(d) Cuando se descarga $\frac{\pi}{4}$ a q_1 $\underline{d = 0.1\,m}$, $\boxed{\tau_1 = ?}$

Desprecio la dinámica de q_2



$$\frac{5mL^2}{8}\ddot{q}_1 + Kq_1 = \tau_1$$

$$q_1 = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$\dot{q}_1 = 2a_2 t + a_1$$

$$\ddot{q}_1 = 2a_2$$

$$\tau_1 = 5 \times \frac{2K}{8}\, 1m^2 \times \ddot{q}_1 + K\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$q_1(0) = a_0 = 0$; $\dot{q}_1(0) = a_1 = 0$; $\ddot{q}_1 = 2a_2 = ?$

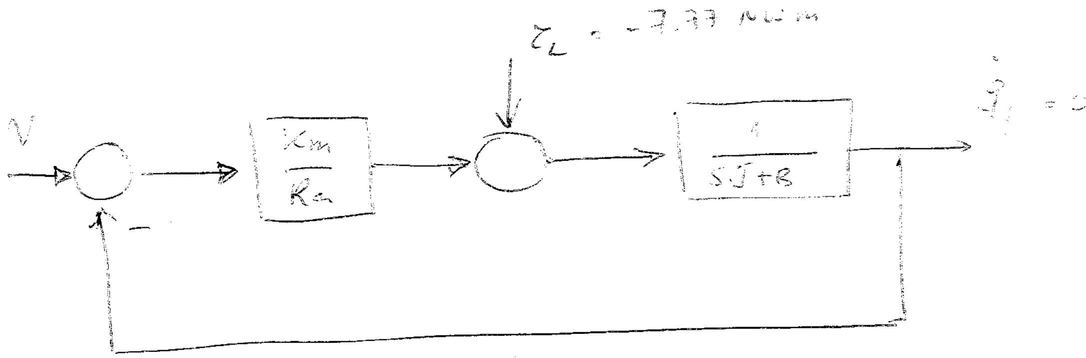
$q_1(\frac{1}{2}) = a_2(\frac{1}{2}s)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{4\pi}{4} = \pi}$ $\boxed{\ddot{q}_1 = 2\pi}$

En 1 seg $\ddot{q}_1 = -2\pi$

$$\tau_1 = 5 \times \frac{2}{8} \times 1 \times (-2\pi) + 0.1\frac{\pi}{4} =$$

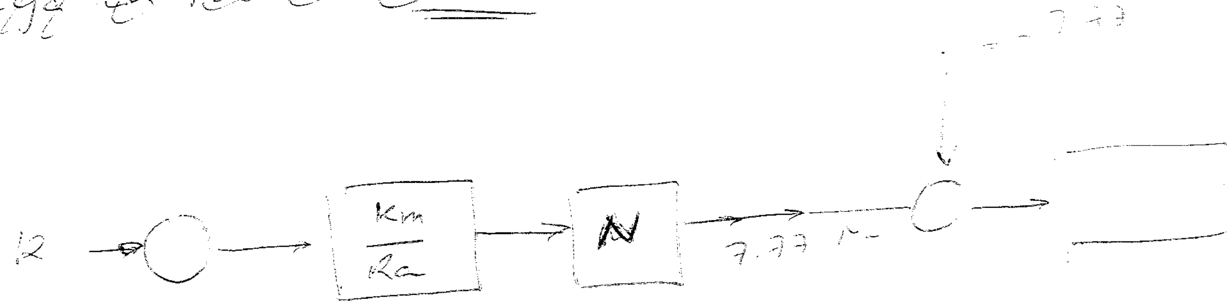
$$= -\frac{5\pi}{4} \times 2 + 0.1\frac{\pi}{4} = \underline{-7.77\ \text{N.m}}$$

(e).



$$\tau_m = K_m V \Rightarrow V = \frac{7.77\ \text{Nm}}{1\times10^{-3}\ \text{Nm}}\ V = \underline{7.77\ \text{KVolt}}$$

[illegible] N : 1000



$$12\ V \cdot \frac{K_m}{R_a} N = \tau_m$$

$$\frac{7.77\ \text{Nm} \cdot 1\Omega}{12\ V \cdot 1\times10^{-3}\ \frac{\text{Nm}}{A}} = N \Rightarrow \boxed{N = \frac{777}{12} = 64.75}$$

at min

(f) $\tau_1 = M(\ddot{q}_d + K_p e_d + K_v \dot{e})$